Leibniz Universität
Hannover

Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Olaf Lechtenfeld
Dr. Pieter Naaijkens

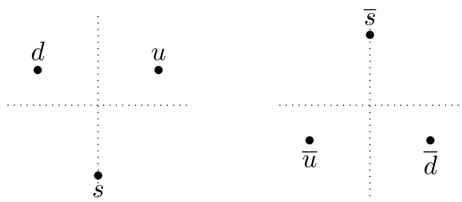
Lie-Algebren und ihre Darstellungen in der Physik
Übung vom 03.06.2014

Übungsstunde 4

Aufgabe 5: Das Koppeln von zwei Spins
Betrachten wir die Lie-Algebra $A_1 = \mathfrak{su}(2)$. Wie bekannt hat die Cartan-Unteralgebra ein Erzeuger, und werden die irreduzible Darstellungen charakterisiert durch das Hochstgewicht j (der Spin), mit $j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}_0$). Das entsprechende Gewichtsdiagramm ist dann

Die übliche Basiszustände $|j, m\rangle$ haben Gewicht m. Nehmen wir jetzt das Kronecker-Product einer Spin-j_1 und einer Spin-j_2-Darstellung. Dann haben die Basisvektoren $|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$ Gewicht $m_1 + m_2$.
Sei jetzt $j_1 = \frac{3}{2}$ (die **4** Darstellung) und $j_2 = 1$ (die **3** Darstellung). Finden Sie die Gewichte (mit Multiplizität) von der $j_1 \otimes j_2$ Darstellung, und ermitteln Sie die Zerlegung in irreduziblen Darstellungen.

Aufgabe 6: Das „$\mathfrak{su}(3)$ flavour“ Modell
Darstellungen von Lie-Algebren spielen eine wichtige Rolle in der Teilchenphysik. Quarks, zum Beispiel, transformieren nach eine $\mathfrak{su}(3)$-Darstellung. Die *up*, *down* und *strange* Quarks kann man identifizieren mit Zustände unterschiedliches Gewicht in der **3**-Darstellung. Diese Darstellung haben wir bereits in Aufgabe 4 (a-c) betrachtet: $|u\rangle = (1, 0, 0), |d\rangle = (0, 1, 0), |s\rangle = (0, 0, 1)$. Das Gewichtsdiagramm ist hier links abgebildet:



Die Gewichte sind $u = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}), d = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}})$ und $s = (0, -\frac{1}{\sqrt{3}})$. Die anti-Quarks werden durch die komplex konjugierte Darstellung $\overline{\mathbf{3}}$ gegeben. Das Gewichtsdiagramm ist oben rechts abgebildet, die Gewichte ergeben sich durch multiplizieren mit -1, z.B. $\overline{u} = -u$.
In der Vorlesung ist bereits die Zerlegung von der $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$ Darstellung gemacht worden: die Darstellung zerlegt als $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{6} \oplus \overline{\mathbf{3}}$. Das bedeutet das zwei-Quark-Zustände entweder zu einem Multiplett von sechs Zustände, oder zu dem anti-Quark-Triplett gehören.

a.) Skizzieren Sie die Gewichte von der $\mathbf{3} \otimes \overline{\mathbf{3}}$ Darstellung in einem Gewichtsdiagramm und finden Sie die Zerlegung in irreduzible Darstellungen.

b.) Die gleiche Aufgabe, aber dann für die $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$ Darstellung.

Die Gewichtsdiagramme erlauben uns zwar die Zerlegung in irreduzible Darstellungen zu ermitteln, zeigen aber nicht wie der Darstellungsraum zerlegt wird. Wenn die Multiplizität eines Gewichts größer als eins ist, könnte der zugehörige Zustandsraum in orthogonale Räume zerlegen, die zu verschiedene irreduzible Darstellungen gehören. Um die Zerlegung des Darstellungsraums zu ermitteln, können wir wie folgt machen: wir fangen an mit einem Hochstgewicht und entsprechenden Vektor $|\varphi\rangle$. Dieser Vektor ist ein Hochstgewichtsvektor in einer irreduziblen Darstellung. Mit den Vernichtungsoperatoren können wir denn den Vektorraum $V_{|\varphi\rangle}$ dieser irreduziblen Darstellung aufbauen. Es folgt das $V = V' \oplus V_{|\varphi\rangle}$. Wir streichen die Gewichte von V_φ von dem Gewichtsdiagramm, suchen das neue Hochtsgewicht, und machen so weiter um V' weiter zu zerlegen.

Betrachten wir jetzt die **3** Darstellung. Es gibt drei Vernichtungsoperatoren e_-^m, $m = 1, 2, 3$. Deren Wirkung auf den Gewichtszuständen ist wie folgt:

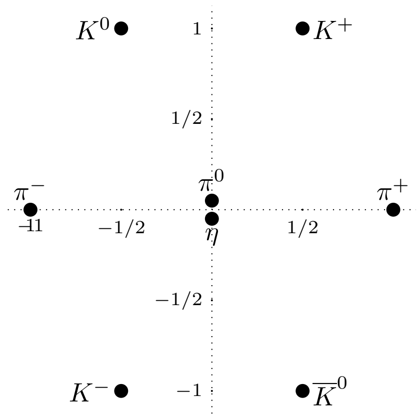
$$e_-^1 |u\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |d\rangle\,, \quad e_-^3 |u\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |s\rangle\,, \quad e_-^2 |d\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |s\rangle\,,$$

ihre Wirkung auf den übrigen Gewichtszuständen ist null. In die $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$ Darstellung werden die Vernichtungsoperatoren also durch $e_-^m \otimes 1 + 1 \otimes e_-^m$ gegeben, mit $m = 1, 2, 3$.

c.) Der Zustand $|u\rangle \otimes |u\rangle$ gehört zu dem Hochstgewicht. Nutzen Sie die Wirkung von der Vernichtungsoperatoren um eine Basis für die **6** Darstellung in $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$ zu ermitteln.

d.) Bemerken Sie das die Vektoren in **6** symmetrisch unter Austausch der beiden Faktor-Räume sind. Die Vektoren in der $\overline{\mathbf{3}}$ Darstellung stehen senkrecht darauf, und müssen deswegen anti-symmetrisch sein. Finden Sie für jedes Gewicht in der $\overline{\mathbf{3}}$ Darstellung den entsprechenden Zustand.

Die Gewichte *u(p)*, *d(own)* und *s(trange)* heißen die „Flavours“ der Quarks. Jetzt können wir die Zusammenhang mit der Teilchenphysik machen, insbesondere mit den Baryonen und Mesonen. Die Hadronen können wir gruppieren in *Multipletten.* Ein Multiplett ist eine $\mathfrak{su}(3)$-Darstellung (charakterisiert durch deren Dimension) plus Angabe von der Baryonzahl B und Spin J. Innerhalb eines Multipletts sind die Quantenzahlen I_3 (*Isospin* in die 3-Richtung) und *Hyperladung* Y Eigenwerte von Operatoren $\hat{I}_3$ und $\hat{Y}$ für Eigenzustände $|I_3, Y\rangle$. Für die Hyperladung gilt $Y = B + S$, wo S die „Strangeness“ ist. Für die pseudoskalare Mesonen gilt z.B. $B = 0$ und $J = 0$. Die zwei weitere Quantenzahlen (I_3, Y) können wir in einem Diagramm zeichnen:



Mit der Identifikation $(p, q) = (I_3, \frac{\sqrt{3}}{2} Y)$ ist das genau das Gewichtsdiagramm von der **8** Darstellung. Genau so gibt es auch ein Meson-Singlett. Deswegen können wir die leichte Mesonen als Zuständen in der $\mathbf{3} \otimes \overline{\mathbf{3}} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$ betrachten. Die leichte Mesonen sind also Quark/anti-Quark Zustände. Für die $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$ Darstellung gilt etwas ähnliches, die zerlegt in ein Baryon-Dekuplett, ein Baryon-Singlett, und zwei Baryon-Oktetts. Die Dekuplett-Zustände sind total symmetrisch, das Singlett ist total anti-symmetrisch. Die Zustände der beiden Oktetten sind gemischt symmetrisch und anti-symmetrisch. Für ein komplette Verständnis braucht man noch die „Farb“- oder „Colour“-Ladung, die mit eine weitere, unabhängige $\mathfrak{su}(3)$-Darstellung **3** verbunden ist, und muss man den Spin (z.B. für den Proton-Zustand) berücksichtigen.